# PART4　不等式の証明

**例題**

次の不等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　$x > 0$ のとき　$3x^3 + 1 > x$

(2)　$x \geqq 0$ のとき　$x^3 + 4x \geqq 3x^2$

**Point Pickup**

**練習**

次の不等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　$x \geqq 0$ のとき　$2x^3+1 \geqq 3x^2$

(2)　$x>1$ のとき　$x^3-6x^2+12x-7>0$

# 第16講　PART4 確認問題

**1**　次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$x \geqq 0$ のとき　$2x^3+27 \geqq 9x^2$

[証明]

$f(x)=(2x^3+27)-9x^2=2x^3-9x^2+27$ とおくと

$f'(x)=6x^2-18x=6x(x-\boxed{\text{ア}})$

$x \geqq 0$ における $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\boxed{\text{イ}}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\boxed{\text{ウエ}}$ | ↘ | $\boxed{\text{オ}}$ | ↗ |

よって，$f(x)$ は $x \geqq 0$ のとき

$x=\boxed{\text{カ}}$ で最小値 $\boxed{\text{キ}}$

をとるので

$f(x) \geqq 0$

したがって，$x \geqq 0$ のとき

$2x^3+27 \geqq 9x^2$

**2** 次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$x>1$ のとき　$x^3-9x^2+27x-19>0$

[証明]

$f(x)=x^3-9x^2+27x-19$ とおくと

$f'(x)=3x^2-$ [クケ] $x+$ [コサ] $=3(x-$ [シ] $)^2 \geqq 0$

よって，常に $f'(x)\geqq 0$ であり，$f'(x)=0$ となるのは

$x=$ [シ] のときのみであることから，$f(x)$ は [ス]。

また，$f($ [セ] $)=0$

よって，$x>1$ のとき　$f(x)>0$

したがって

$x>1$ のとき　$x^3-9x^2+27x-19>0$

[ [ス] の選択肢]

① 極大値をもつ　② 単調に増加する

③ 単調に減少する　④ 一定の値をとる

[MEMO]

# PART4　不等式の証明

**例題**

次の不等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　$x>0$ のとき　$3x^3+1>x$

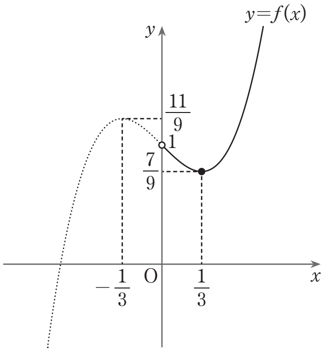
(2)　$x\geqq 0$ のとき　$x^3+4x\geqq 3x^2$

(1)　$f(x)=(3x^3+1)-x=3x^3-x+1$ とおくと

$$f'(x)=9x^2-1=(3x+1)(3x-1)$$

$x>0$ における $f(x)$ の増減表は以下。

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{1}{3}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | | ↘ | $\frac{7}{9}$ | ↗ |




よって，$x>0$ のとき　$x=\dfrac{1}{3}$ で最小値 $\dfrac{7}{9}$ $(>0)$をとるので，$f(x)>0$

したがって，$x>0$ のとき　$3x^3+1>x$

(2)　$f(x)=(x^3+4x)-3x^2=x^3-3x^2+4x$ とおくと

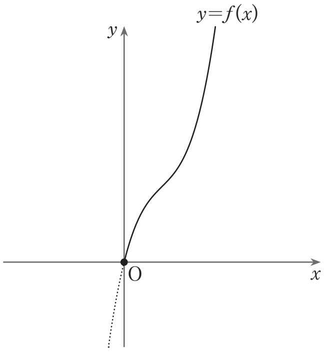
$$f'(x)=3x^2-6x+4=3(x-1)^2+1>0$$

よって，常に $f'(x)>0$ より，$f(x)$ は単調に増加する。

また，$f(0)=0$

よって，$x\geqq 0$ のとき　$f(x)\geqq 0$

したがって，$x\geqq 0$ のとき　$x^3+4x\geqq 3x^2$



**練習**

次の不等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　$x \geqq 0$ のとき　$2x^3+1 \geqq 3x^2$

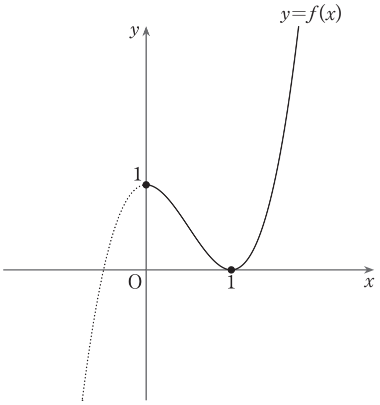
(2)　$x>1$ のとき　$x^3-6x^2+12x-7>0$

(1)　$f(x)=(2x^3+1)-3x^2=2x^3-3x^2+1$ とおくと

$$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$$

$x \geqq 0$ における $f(x)$ の増減表は以下。

| $x$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | 1 | ↘ | 0 | ↗ |




よって，$f(x)$ は $x \geqq 0$ のとき　$x=1$ で最小値 0 を

とるので，$f(x) \geqq 0$

したがって，$x \geqq 0$ のとき　$2x^3+1 \geqq 3x^2$

(2)　$f(x)=x^3-6x^2+12x-7$ とおくと

$$f'(x)=3x^2-12x+12=3(x-2)^2 \geqq 0$$

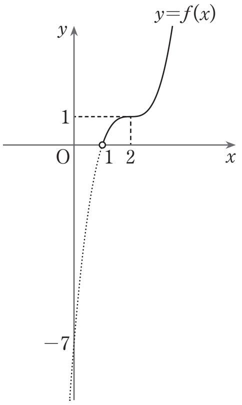
よって，常に $f'(x) \geqq 0$ であり，$f'(x)=0$ となるのは

$x=2$ のときのみであることから，$f(x)$ は単調に増加する。

また，$f(1)=0$

よって，$x>1$ のとき　$f(x)>0$

したがって，$x>1$ のとき　$x^3-6x^2+12x-7>0$



# 第16講 PART4 確認問題 解答

## 1

**[正解]** ア：3，イ：3，ウエ：27，オ：0，カ：3，
キ：0

**[解説]**

$f(x)=(2x^3+27)-9x^2=2x^3-9x^2+27$ とおくと

[A]

$$f'(x)=6x^2-18x=6x(x-3)$$

$x\geqq 0$ における $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

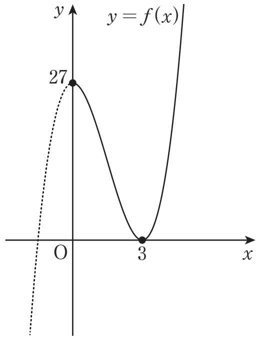
| $x$ | 0 | $\cdots$ | 3 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | **27** | ↘ | **0** | ↗ |

よって，$f(x)$ は $x\geqq 0$ のとき $\boldsymbol{x=3}$ で最小値 **0** をとるので

$$f(x)\geqq 0$$

したがって，$x\geqq 0$ のとき

$$2x^3+27\geqq 9x^2$$




[A]　不等式 $g(x)\geqq h(x)$ の証明
$f(x)=g(x)-h(x)$ とおき，関数の増減，および最小値を用いて，不等式の証明を行う。
　不等式 $f(x)\geqq 0$
　$\Longleftrightarrow$（関数 $f(x)$ の最小値）$\geqq 0$

## 2 [正解] クケ：18，コサ：27，シ：3，ス：②，セ：1

**[解説]**

$f(x)=x^3-9x^2+27x-19$ とおくと

$$f'(x)=3x^2-\mathbf{18}x+\mathbf{27}=3(x-\mathbf{3})^2\geqq 0$$ [B]

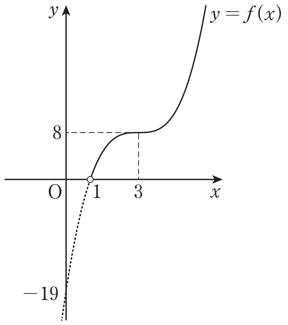
よって，常に $f'(x)\geqq 0$ であり，$f'(x)=0$ となるのは $x=3$ のときのみであることから，$f(x)$ は**単調に増加する。**

また，$f(\mathbf{1})=0$

よって，$x>1$ のとき　$f(x)>0$ [C]

したがって

$$x>1 \text{ のとき}\quad x^3-9x^2+27x-19>0$$




[B]　$x>\alpha$ において，$f'(x)\geqq 0$ である（単調増加である）ことと $f(\alpha)>0$ であることから，最小値 $>0$ を示す。

[C]　不等式 $f(x)>0$ $(x>\alpha)$ の証明
不等式 $f(x)>0$
$\Longleftrightarrow$（関数 $f(x)$ の最小値）$>0$